フーリエ級数とフーリエ変換

I. フーリエ級数

A.関数の三角関数への展開

任意の周期関数は、同じ周期とその高調波（＝整数倍の周波数）の正弦波関数に分解できる。この正弦波関数の和をフーリエ級数と呼ぶ。フーリエ級数は、周期関数 $f(x)$を、それに対して定義されるフーリエ係数 a_n, b_n と三角関数 cos, sin を用いて

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right\}$$

の形に展開して表わしたものである。ここで、f は実数値の関数、ω は周期 T の逆数に 2π を掛けた角周波数である。また、b_0 の項は sin 関数が常に 0 となるので実際には意味を持たない。$n\omega$ は基本周波数 ω の整数倍の周波数で、高調波と呼ばれる。フーリエ級数展開は、任意の波形が、基本周波数とその高調波の正弦波に分解できることを意味している。

任意の周期関数がフーリエ級数に展開可能であるかどうかは数学上の詳細な検討が必要であるが、物理学で取り扱う連続関数は問題なく展開可能であり、現実的には全ての関数がフーリエ級数展開可能と考えても差し支えない。

B.フーリエ級数の係数

どんな関数でも正弦波に分解できると言われても、実際にそれをする方法がなければ余り使えない。実は時間関数$f(t)$を周期 T の実数値関数とすると、フーリエ級数の係数は以下の式で求められる。

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega t)dt$$

a_n を f のフーリエ余弦係数(Fourier cosine coefficient)、b_n を 関数 f のフーリエ正弦係数(Fourier sine coefficient) という。

この式は以下の三角関数の直交性を利用している。

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt=\frac{T}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt=\frac{T}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos(n\omega t)\sin(m\omega t)dt=0$$

ただし、δ_{nm} はクロネッカーのデルタで、$n = m$ のときは1、それ以外の n,m で0をとる。

同じ周期、同じ位相(sin と cos は位相が 90 度ずれた関数と考えることができる)の正弦波同士のかけ算は、一周期にわたって積分すると有限な値（ここでは $T/2$）をとり、それ以外の組み合わせでは積分値が 0 となる。よって、多成分を含む関数 f に、ある周期と位相の正弦波をかけて積分すれば、その正弦波成分だけが取り出されることになる。じっさいに f のフーリエ級数展開を例として、cos(nωt)をかけて積分してみると、

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos(m\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{-T/2}^{T/2}a_n\cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt+\int_{-T/2}^{T/2}b_n\sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt\right\}$$

$$=\int_{-T/2}^{T/2}a_n\cos(m\omega t)\cos(m\omega t)dt$$

$$=a_n\frac{T}{2}$$

である事が分かる。

C.実関数の複素フーリエ級数展開

オイラーの公式により、正弦波関数 sin($n\omega t$)と cos($n\omega t$)は exp($jn\omega t$)で置き換えることができる。このことを利用すると、実関数を複素関数 exp($jn\omega t$)でフーリエ級数展開することもできる。$f(x)$ を関数とすると、一般には

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(jn\omega t)$$

と表せるはずである。（和の範囲がマイナス無限大まで伸びているのは、後の計算で必要性が分かるので、ここではそうゆうものだと思っておこう。）この式は c_n の選択によって f を複素数の値をとる関数にまで拡張できる。このことから a_n, b_n は実数の係数だったが、c_n は一般に複素数の係数である。この表記を実数の関数に適用するため、オイラーの公式から得られる変換式

$$\cos(n\omega t)=\frac{e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t}}{2}$$

$$\sin(n\omega t)=\frac{e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}}{2j}$$

を実関数のフーリエ級数展開に代入すると、

$$f(t)=\sum_{0}^{\infty}\left\{\frac{a_ne^{jn\omega t}+a_ne^{-jn\omega t}}{2}+\frac{b_ne^{jn\omega t}-b_ne^{-jn\omega t}}{2j}\right\}$$

$$=\sum_{0}^{\infty}\left\{\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega t}\right\}$$

と式変形できる。ここで指数関数展開の式と係数を比較すると、

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = c_n{}^*$$

$$c_0 = \frac{a_0 - jb_0}{2} + \frac{a_0 + jb_0}{2} = a_0$$

の関係になる事が分かる。

複素正弦波関数 exp($j n\omega t$)で展開すると n がマイナスの項も現れた。元の関数が実数関数の場合、$-n$ の係数は n がプラスの係数の複素共役である。実は exp($j n\omega t$)と exp($-j n\omega t$)も複素共役の関係にあるので、多項式全体が複素共役の和になり、実数値をとることができるのである。a_0 をもともと $a_0/2$、$b_0=0$ と定義しておくと 0 以上の全ての n について、

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad c_{-n} = c_n{}^*$$

が成立する。

正弦波関数に直交関係があるように指数関数にも直交関係が成立する。

$$\int_{-T/2}^{T/2} \exp\left(jn\omega t\right) \exp^*\left(jm\omega t\right) dt = T\delta_{nm}$$

この直交関係から、

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f\left(t\right) \exp^*\left(jn\omega t\right) dt$$

により級数の係数が求められる事が分かる。

D.フーリエ級数の意味

周期関数を正弦波に分解できることが何を意味するか考えてみたい。任意の周期関数は、基本周期と高調波の正弦波の和で表すことができる。これは以前の講義で述べたように、正弦波関数がベクトル空間をなし、任意の連続関数をその中の座標として表現できるためである。んん、難しくて不思議なことのようにも思える。

しかし現実の世界で考えれば、どんな波形の音の波を聞いたとしても、その中に何らかの周波数成分が存在していて、ヒトはそれを聞き分けることができる。（音の高い、低いが周波数を表している。）つまり、不思議なような事をヒトはすでに経験的に知っていて、しかも利用している。

同じように、ラジヲが電波を受信すると、局毎に電波を分解して音に戻す。チューナーはフーリエ級数展開器で、電波を周波数成分に分解してくれるのだ。こんな風に、日常生活にはフーリエ級数展開がたくさん潜んでいて、そのおかげで私たちは便利に暮らしていける。関数をフーリエ級数展開で周波数に分解することをフーリエ変換と呼ぶが、化学分

析で使われる FT-IR の FT はフーリエ変換を表している。フーリエ変換を利用すると長時間の測定を一瞬で終わらせることができるのである。また医療で使われる CT 断層撮影もフーリエ変換を使って像を再生している。そして実は、あなたの目が像を結ぶ際にもフーリエ変換が使われている。フーリエ変換無しでは自分でものを見る事さえできない。そんな便利な道具は使わない手はないだろう。

II. フーリエ変換

A.非周期関数の周波数展開

フーリエ級数展開は周期関数を基本周期と高調波の正弦波に分解する操作だった。だとすると、せっかくの周波数分解の技術も周期関数にしか使えないことになる。でも世の中には周期的でない関数は山ほどあるし、その周波数成分を知りたいことも多い。せっかく便利そうなフーリエ級数展開が、実はあまり役に立たないと言うこと？そういわずに一工夫してみよう。

周期 T と角周波数 ω の関係は、

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

である。非周期関数を、非常に周期が長い関数であると考えるなら、その基本周波数は周期の逆数で非常に小さくなる。つまり、非周期関数をフーリエ級数展開するためには、基本周波数を無限に小さくしていけば良いはずだ。基本周波数は周波数軸上の分割幅になるので、$\Delta\omega$ と書くことにする。フーリエ級数に
よる展開式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\Delta\omega t) \times 1$$

は、ω 軸上で幅 1、高さ c_n×exp の面積を掛けて足していったものと考えられる。ここで、係数

$$F_n = c_n / \Delta\omega$$

を新たにと定義し、幅 $\Delta\omega$、高さ F_n×exp の面積を足していくことにする。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(jn\Delta\omega t) \times \Delta\omega$$

この式で、基本周波数が小さくなっていくと、周波数幅 $\Delta\omega$ は極限値 $d\omega$ に収束する。同時に変数 $n\Delta\omega$ は刻み幅が 0 になり、連続に変化する周波数 ω になる。同時に Fn はすべての周波数に対して値をもつ連続関数 F(ω)になる。そして不連続な $n\Delta\omega$ についての和は、連続な変数 ω 上の積分になるので、記号も和から積分に、Σ を∫に変更した。

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

数学上の厳密性はとにかくとしても（ちゃんと合わせてありますが)、1 ごとに足していた正弦波を、もっと細かく分けて足していくとの積分になる。

もともと積分の定義自体が、細かく分けて足すことだったことを思い出すと何となくわかる気がする？そこで出てきた式を眺めると､時間関数 f(t)は周波数を変数とする関数 F(ω)に exp($j\omega t$)を掛けて積分したもので表せることが分かる。つまり、関数 F(ω)は周波数の分割を細かくして連続になってしまった c_n（フーリエ級数の係数）のなれの果てということだ。

ちょっと寄り道：連続周波数での正弦波の直交性

ω が連続になっても exp の直交性は維持され、同じ周期関数の積は T になる。

$$\begin{aligned}
&\int_{-T/2}^{T/2}\exp(jn\omega t)\exp^*(jn\omega t)dt\\
&=\int_{-T/2}^{T/2}\exp(jn\omega t)\exp(-jn\omega t)dt\\
&=\int_{-T/2}^{T/2}\exp(0)dt\\
&=T
\end{aligned}$$

このとき基本周波数 ω が小さくなれば、周期 T はその逆数で大きくなるため、極限では積分範囲が無限に広くなって、積分値も無限大になってしまう。

これを避けるため、積分変数を角度 $\theta=\omega t$ に変換し、積分範囲を 2 つの関数に共通の周期の位相-π から π までにする。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\exp(jn\theta)\exp^*(jm\theta)d\theta=2\pi\delta_{nm}$$

周期 T が無限に広がっても、角周波数 ω が小さくなるため、積分値は無限大に発散しないですむのである。

この場合、$n=m$ の積分値は積分範囲である 2π になる。積分する変数(はじめは t で次は θ)の違いによって積分値が違ってくることに注意してもらいたい。積分変数を変えることは、積分される関数の横幅を変えることになるので、縦は同じ関数でも横幅が伸び縮みする。

たとえば仮に周期 1 の関数 $f_1(t)$の 1 周期の積分が 1 であったとする。

$$\int_{-1/2}^{1/2}f_1(t)dt=1$$

変数 t を θ=2π×周期 1×t に換えて積分したとすると、縦方向に同じ形の波形が横に 2π 倍に引き延ばされる。

$$\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\theta)d\theta=\int_{-1/2}^{1/2}f_1(t)2\pi dt=2\pi$$

よって、面積も 2π 倍になるのである。積分変数を定数 a 倍した変数で積分すると、積分値も a 倍になることに注意しよう。

B. 周波数関数

新しくできた関数 $F(\omega)$について考えてみよう。F はフーリエ係数が連続化してできた関数で、周波数 ω の正弦波がどれだけ含まれるか、割合を示す関数だ。この F を求める方法は、フーリエ係数を求める方法と同じだ。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp^{*}(j\omega t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$f(t)$に掛ける exp は複素共役になるので、j にマイナスがついている。関数 f を周波数で分解すると何気なく関数 F が出てきた。しかし、よく考えるとこれは時間空間の関数 f から、周波数空間の関数 F への写像とみることもできる。つまり、フーリエ係数を求めるという操作によって、時間空間から周波数空間に飛ばされただけで、f と F は同じ物理現象の別表現、とみることもできる。このような時間空間から周波数空間への関数形の変換をフーリエ変換と呼ぶ。

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt \qquad \text{フーリエ変換}$$

そして、写像に逆写像があるようにフーリエ変換の逆がある。それを逆フーリエ変換と呼ぶ。

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \qquad \text{逆フーリエ変換}$$

C.フーリエ変換の係数

あれ？積分の前になんだか変なものがついている。なんで 1/√2π が付いてるんだろう。

関数 $f(t)$を $\exp(j\omega t)$を掛けて積分したときを基準に考えてみる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt=F(\omega)$$

変換された関数 $F(\omega)$を逆変換すると、積分変数 ω は t の逆数にさらに 2π を掛けた数なので横にひろがり、積分値も 2π 倍になる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega=2\pi f(t)$$

これではフーリエ変換と逆フーリエ変換をして帰ってきた関数が、元の関数に戻らない。

正弦波の直交性のところで計算したように、同じ正弦波同士をかけ算すると、積分値は

１ではなく積分区間の長さ(exp の場合)になった。これは積分変数に定数倍がかかった形で積分するからだった。正と逆の変換で t と $1/t$ を変数として積分すれば長さは打ち消し合うが、積分変数 t と $2\pi/t$ なので、積分値が大きくなってしまった。そこで逆フーリエ変換して元に戻るよう，計算の前に定数倍をつけたのだ。だとすると、変数の非対称性を考慮して、

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt \qquad \text{フーリエ変換}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \qquad \text{逆フーリエ変換}$$

の形の定義もあり得る。またフーリエ変換を t、逆変換を周波数 ν(=1/t)で積分すれば、前の係数はいらないことになる。

$$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j2\pi\nu t)dt \qquad \text{フーリエ変換}$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp(j2\pi\nu t)d\nu \qquad \text{逆フーリエ変換}$$

電気系の計算では電磁気学的な単位系が ω を基準にして作られているため主に角周波数 ω を使うが、応用の分野によってどれか便利な定義を使うのが良い。

D. 正規分布関数のフーリエ変換

平均 μ、標準偏差 σ の正規分布関数 f は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

である。平均を 0、標準偏差を τ とすると、

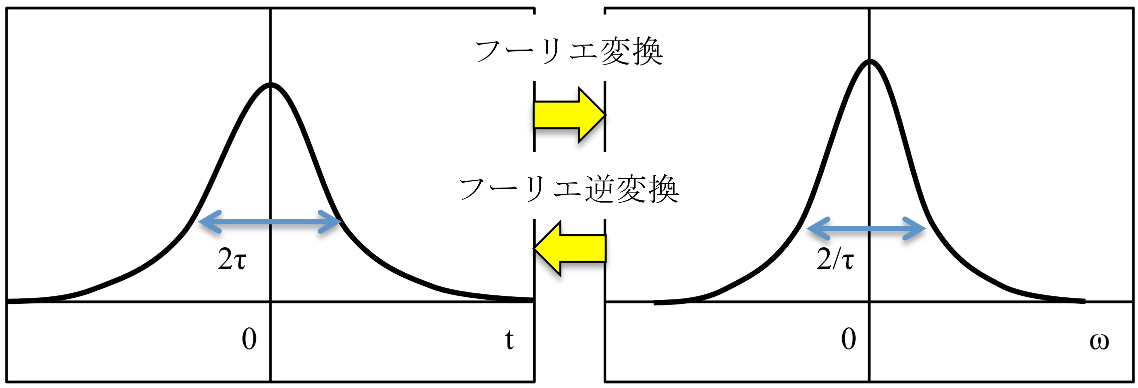
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right)$$

となる。この関数のフーリエ変換 $F(\omega)$は同じく正規分布の形で、

$$F(\omega)=\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^2\omega^2\right)$$

である事が知られている。

これは、横幅 τ の分布をフーリエ変換すると、横幅 $1/\tau$ の分布になる事を示している。



正規分布関数　　　　　　　正規分布のフーリエ変換

ここで注意してもらいたいことは、**時間領域の分布の幅が広がると、周波数領域の分布の幅が狭まることだ。**これは、周波数が時間の逆数である事を考えると当たり前なのかもしれないが、この数学的な規則性はいくつかの重要な物理現象に影響を与える。

例えばレンズの解像度はレンズの直径に反比例する。レンズが大きいほど、細かいものが判別できる。実は、レンズによる結像は波源から広がった光の、空間フーリエ逆変換なので、レンズ上のフーリエ変換像の広がりが大きいほど結像される点の広がりは小さくなるのである。

また、素粒子を波動としてみるならば、その運動量(=プランク定数×波数)は座標のフーリエ変換である。よって、粒子の波動関数の座標上の広がりと、運動量の広がりの積は一定になる。つまり不確定性原理はフーリエ変換によって説明できるのである。

E. 三角関数の完全性

フーリエ変換$\Im$を以下の様に定義するとして、

$$F(\omega)=\Im f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt \qquad \text{フーリエ変換}$$

$$f(t)=\Im^{-1}F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \qquad \text{逆フーリエ変換}$$

関数 f(t)に対し、フーリエ変換とフーリエ逆変換を繰り返せば元の f(t)に戻る。これを確認するため、f(t)のフーリエ変換を逆フーリエ変換の式に代入する。このときフーリエ変換の角周波数、時間は逆変換の変数とは独立なので ω_1、t_1 と表記する。

$$\Im^{-1}\Im f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\exp(-j\omega_1 t_1)dt_1\exp(j\omega t)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j\omega_1 t_1)dt_1\exp(j\omega t)d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp j(\omega-\omega_1)t_1\, dt_1 d\omega$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp j(\omega-\omega_1)t_1 dt_1=\delta(\omega-\omega_1)$$

である事に注意する。ω と t は独立な変数なので ω による積分では $f(t)$ は定数になる。よって、$f(t)$ に δ 関数を掛けて積分するとただの $f(t)$ になる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\omega-\omega_1)d\omega=f(t)$$

よって、フーリエ変換の逆フーリエ変換が元の関数に戻ることが保障される。

$$\Im^{-1}\Im f(t)=f(t)$$

これは 2 つの変換において情報の欠落が無いことを意味する。つまり、複素数を含む正弦波への展開は、元の波の情報を全て含んでいることになる。このことから、連続な波は正弦波の和として表すことができることが分かるのである。この三角関数の集合の性質を三角関数の完全性と呼ぶ。

同様に元の関数が再現可能な関数群は完全である。多項式、ルジャンドル関数、ベッセル関数などがその例である。

* δ 関数

δ 関数は原点 0 のみで∞、その他の全ての値に対して 0 で、-∞から∞までの積分が 1 となる関数である。点 0 のみで不連続な超関数の一種である。これは、幅 w 高さ 1/w の長方形の w→0 の極限である。

$$\delta(w)=\lim_{w\to 0}\left\{\begin{array}{cc} 1/w & -w/2\le x\le w/2 \\ 0 & x<-w/2, w/2<x \end{array}\right\}$$