12 月 11 日のレポート課題を解説します。この問題は、フーリエ級数展開の原理を示しています。これが分かると、フーリエ級数、フーリエ変換が、かなり分かってくると思います。次回は講義内の演習になり、解説できませんので、この解説を読んで理解しておいて下さい。

レポート課題

「一般に、周期 T(または全体の角周波数 $\omega=2\pi/T$)の周期関数 $f(t)$は、n を 0 または自然数として、三角関数の和

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t)+b_n \sin(n\omega t)\}$$

で表せる。ただし、a_n, b_n は n で決まる係数である。

正弦波の直交性を使って、この式の係数を求める方法を示せ。」という課題でした。

まず、正弦波の直交性は、以下の式のようになります。

(a) $2/T\int_0^T \sin(n\omega t)\times\sin(m\omega t) = 0(n\neq m)$, または $1(n=m)$

(b) $2/T\int_0^T \sin(n\theta)\times\cos(m\theta) = 0$

(c) $2/T\int_0^T \cos(n\theta)\times\cos(m\theta) = 0(n\neq m)$, または $1(n=m)$

正弦波同士の内積を計算してみると、sin または cos が同じで、かつ周波数も同じ関数の場合のみ、1 となり、それ以外は全て 0 となります。要は、同じ関数同士以外はみんな内積が 0 になってしまうと言うわけです。

だとすると、関数 $f(t)$が正弦波の和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t)+b_n \sin(n\omega t)\}$$

である場合、$f(t)$と正弦波（例えば $\cos(m\omega t)$ ）の内積

$$2/T\int_0^T f(t)\times\cos(m\omega t)$$

は、cos($m\omega t$)以外の項は積分すると 0 になり、cos($m\omega t$)の 2 乗の積分のみが残ります。

しかもその積分値は 1 なので、係数 a_m 倍されて、a_m が求められます。

$$\begin{aligned}
\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)dt &= \frac{2}{T}\int_0^T\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right]\cos(m\omega t)dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(n\omega t)\cos(m\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\cos(m\omega t)\right]dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{2}{T}\int_0^T\cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt+b_n\frac{2}{T}\int_0^T\sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt \\
&= a_m+0=a_m
\end{aligned}$$

sin についても同様で、cos($m\omega t$)を内積することで、b_n が求められます。

結局、任意の周期関数は sin, cos という正弦波の和に展開できて、各正弦波の係数（その正弦波が含まれる割合）は、正弦波との内積を取ることで求められることが分かります。これこそが、関数を周波数成分に分解するのフーリエ級数展開です。

さらに、関数 f(t)の周期を無限大にすると（周期関数でなくなる）、正弦波の周波数の間隔は 0 になり、周波数軸上で連続した係数が得られます。これは周波数関数 F(ω)と考えられ、この時の f から F への変換をフーリエ変換と呼びます。

exp($jm\omega t$)は、複素数の正弦波なので、sin, cos 同様にフーリエ級数展開やフーリエ変換が可能です。

フーリエ級数展開のやり方は、4 回目の講義で説明していますので、復習しておいて下さい。内積を取る際に、exp($jm\omega t$)の複素共役をかけること以外は、基本的に三角関数の場合と一緒です。確認しておいて下さい。

フーリエ級数（指数関数）の求め方

任意の周期関数 ψ(t)は正弦波の和に展開できる。その係数を a_n とする。
つまり、ある関数 ψ は級数 a_n で表すことが出来る。ただし、a_0 は定数。

$$\psi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\exp(jn\omega t)$$

ここで、ψ に周波数 $m\omega$ の正弦波（$\exp(jm\omega t)$）を内積する。

$$\frac{1}{T}\int \psi(t)\exp^*(jm\omega t)dt = \frac{1}{T}\int \sum_{n=0} a_n \exp(jn\omega t)\exp^*(jm\omega t)dt$$

内積が、同じ周波数では 1、それ以外では 0 になることを使うと、（これは、$\exp(jn\omega t)$ の直交関係）

$$= \frac{1}{T}\int a_m \exp(jm\omega t)\exp^*(jm\omega t)dt = a_m$$

と、m 項のみが残って、係数 a_m が取り出せる。
同様に、任意の周期の係数が取り出せるので、内積

$$\frac{1}{T}\int \psi(t)\exp^*(jm\omega t)dt$$

によって、任意の係数 a_n を求めることで、関数 ψ を整数倍の周波数成分に分解することができる。