# 今日の課題(2)

- ガウスの法則はどんなことを意味しているのか。
- コンデンサは何をたくわえるのか。
- コンデンサCにおける、電圧vと電流iの関係式。

　それぞれ自分の理解を文章にまとめながら、講義を聞いて下さい。最後にレポートとして提出します。

# 2.電界とコンデンサー

A.電気の基礎

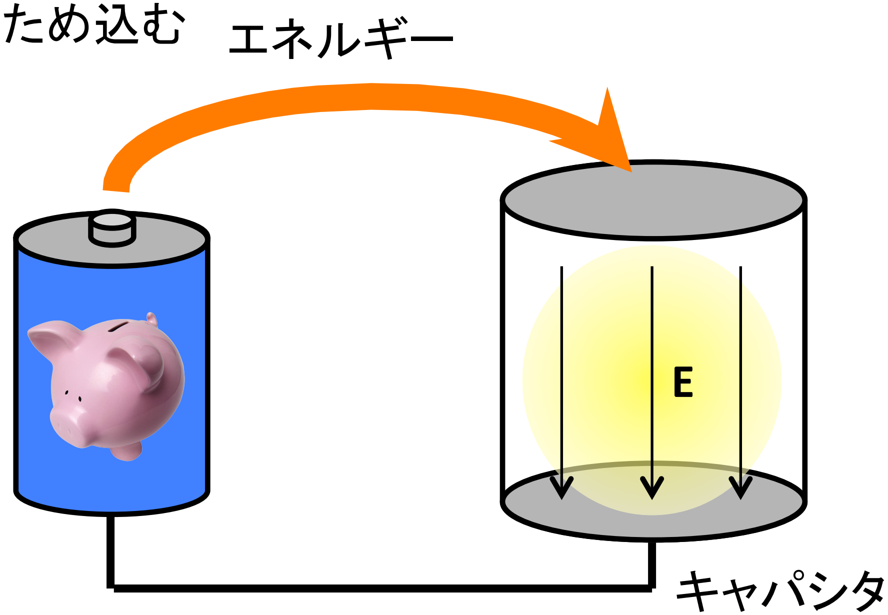
電気回路の基本素子の一つがコンデンサーである。英語ではcapacitorキャパシタなので、これからはそう呼ぼう。

抵抗は電気エネルギーを熱に変換した。

キャパシタは電気エネルギーを、電界のエネルギーに変換してため込むことができる。

**電界E**は、空間に発生する**電気力の強さを表す**ベクトル量である。はじめは理論上の量でしかなかったが、空間のひずみとしての実体を持ち、空間にエネルギーをため込む事が分かった。

電界にたまったエネルギーは、散逸せずに戻ってくる。
これはバネと似ている。
バネに力が加えられると、バネのひずみとしてエネルギーが蓄えられ、バネを放すとエネルギーが戻ってくる。

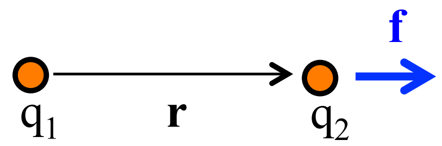



ここではキャパシタの動作を詳しく勉強しよう。

# 電界Eと電束密度D

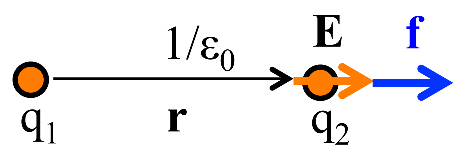
電界**E**は電気力を伝える媒質のようなものである。電荷$q_1$が電荷$q_2$に及ぼす電気力**f**はクーロンの法則でも表すことができる。

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$




でも、クーロンの法則では点電荷同士の力しか分からない。
球面上に電荷が分布しているような場合はお手上げだ。
そこで電界を考えた。電荷$q_1$は空間に歪みを作る。これが電界**E**だ。
電界がある空間に来ると、電荷$q_2$には**E**$q_2$の力がかかる。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{q_1}{\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \mathbf{f} = \mathbf{E}q_2$$



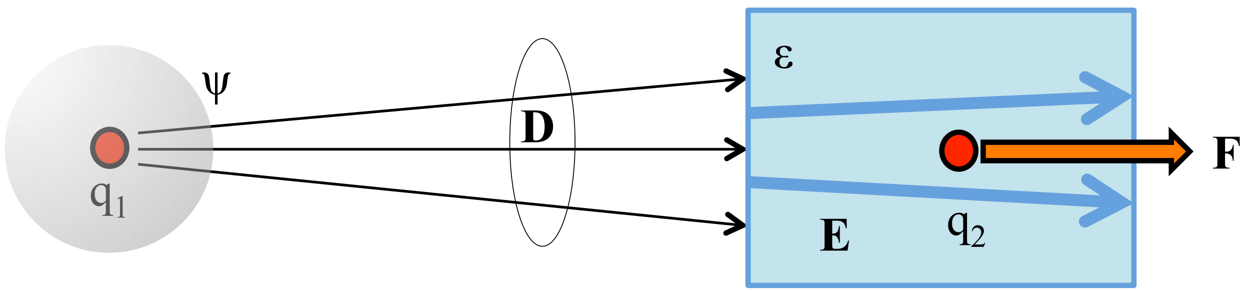

直接の力ではなく、いったん電界を介すると、電気力を空間の性質として考えることができる。空間の性質を「場」と呼ぶ。

実は3つ以上の点電荷の運動は計算することができない(3体問題)。しかし、場の考え方を使えば、ポテンシャル中の点電荷の運動として計算が可能になる。

# 電界と電束密度の違い

電荷$q_1$は周囲の空間に、電荷量と等しい電気力線の束、電束ψを発散している。

電束の密度**D**によって作られた空間の歪み**E**が電荷$q_2$に電気力**F**を及ぼす。DがEを作るときの比例定数を1/ε（誘電率）とする。



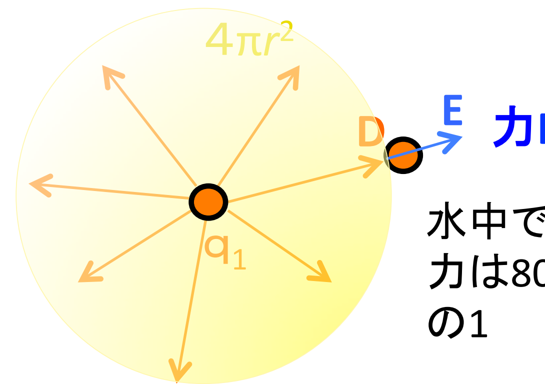

電束の総量Ψは、発生源の電荷量q1に等しいので、電束密度Dを全部足しあわせると、q1になる。
この量は変わらないので、電束密度Dも空間の性質によって変わることはない。

いっぽう、電気力は・・・
水の様な誘電体中で電界は弱まる。
水の誘電率は真空の80倍なので、
電気力は1/80に弱まる。
その分、電界も弱まっている。

# 電束と電界

電界を使って考えるため、クーロンの法則を便利な形に書き換えよう。
電界の式を見ると、電荷から力の元が湧きだし、距離$r$に対して球の面積（$4\pi r^2$）に広がって行く。$q_1$からわき出す量を**Dとすると、**$1/\varepsilon_0$の大きさで力**E**を発生させる。

$$E=\frac{1}{4\pi r^2}\frac{q_1}{\varepsilon_0} \quad \xrightarrow{\text{分解}} \quad D=\frac{1}{4\pi r^2}q_1 \qquad E=\frac{D}{\varepsilon_0}$$

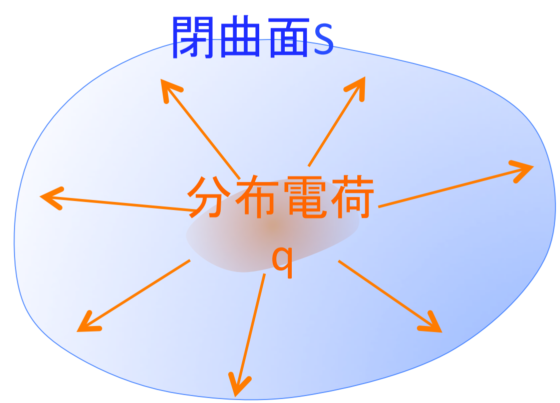



電束密度**D**は電荷量$q$に比例する。
電界**E**は電気力に比例する。
似ているけれど別々の量。

水中では、力は80分の1

*D*の総量は途中で増えも減りもしない（保存量）。
それが球面に広がるから、面積分の1に弱まる。
この電荷からわき出すものは電束と呼ばれる。
*D*は電束の密度である。

分布する電荷でも、そこから出る電束の総量は電荷量に等しい。なので、任意の閉じた曲面S上を通り抜ける電束の総量は、電荷量に等しい。



# ガウスの法則

微小面積$da$を抜けていく電束の量を$d\psi$とする

$$d\psi = \mathbf{D} \bullet \mathbf{n} da$$

電束のS上の総和$\psi$

$$\psi = \int_S \mathbf{D} \bullet \mathbf{n} \, da$$

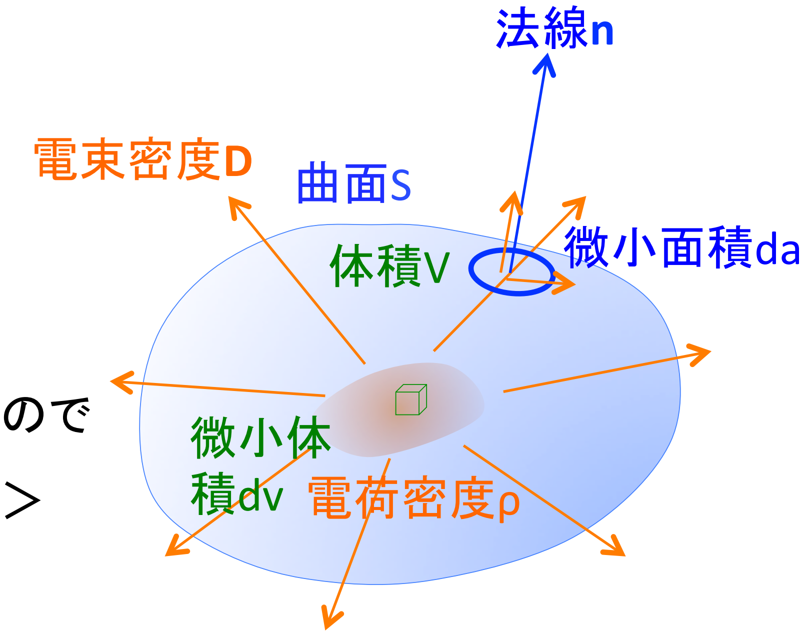
S内の体積Vに存在する電荷の総量$q$は

$$q = \int_V \rho \, dv$$

電束の総量はそれを発する電荷に等しいので

$$\int_S \mathbf{D} \bullet \mathbf{n} \, da = \int_V \rho \, dv$$ ＜ガウスの法則＞

である。この関係をガウスの法則と呼ぶ。



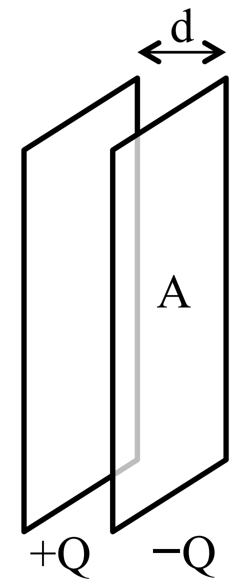

ガウスの法則を正確に書くと

Dは電束密度のベクトル、ρは電荷密度、nは法線ベクトル、$da$はS上の微少面積、dvはS内の微小体積、

ガウスの法則
電荷から湧き出す電束は、元になる電荷量に等しい

ガウスの法則を簡単に書くと

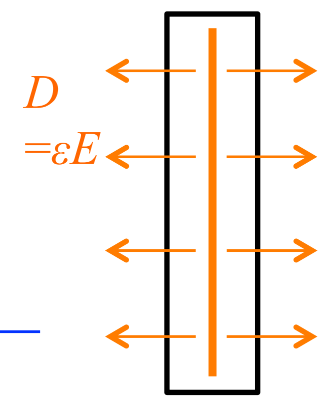
# キャパシタの性質1




距離d離れた面積Aの二枚の金属板（極板）に、電荷+Q と-Qが均一に分布している。この時、二枚の極板の間の電界強度Eと電位差Vを求めてみよう。

近似的に、極板の縁から出る電束量はわずかで、無視できるものとする（極板がdに比べ、非常に広い場合。）
すると電束は全て極板に垂直で、両側の面積Aを抜けていく。
よって、電束量は$2AD$である。
ガウスの法則によると極板から出る電束の総和はQである。

$$Q=2AD=2A\varepsilon E$$



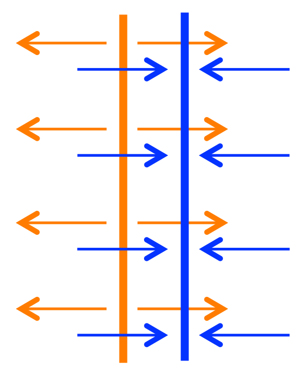

この式から、1つの極板の電荷が作る電界の強度Eは

$$E=Q/2A\varepsilon$$

となる。電極の間では電界は足し合わされるので、

$$E=Q/A\varepsilon$$

となるが、外側では電界は打ち消しあって0となる。



# キャパシタの性質2

電位$\varphi$の定義（xは距離）

$$\phi = \int E \bullet dx$$

を使うと、間に均一な電界Eがある距離d離れた極板の電位差Vは

$$V=Ed$$

である。まとめると、

$$V = \frac{d}{\varepsilon A} Q = \frac{1}{C} Q \qquad C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

の関係が得られる。Cは電気容量と呼ばれるキャパシタの定数である。

電圧×電荷がエネルギーで、それが線形に増加することに注意すると、コンデンサに蓄えられるエネルギーUは、

$$U=QV/2$$

である。$Q=A\varepsilon E$, $V=dE$を代入すると、

$$U=\varepsilon E^2 Ad/2$$

で、体積当たりのエネルギー密度eは

$$e=\varepsilon E^2/2=DE/2=D^2/2\varepsilon$$

である。キャパシタには電界、または電束の形でエネルギーが蓄えられる。

# キャパシタの電流と電圧

電流iは単位時間に移動する電荷量Qとすると、

$$Q = \int i dt$$

なので、キャパシタにかかる電圧Vは

$$V = \frac{1}{C}\int i dt$$

のように、電流の積分で表される。

キャパシタにかかる電圧$V_C$は流れた電流$i$の積分の1/C倍になる。

$$\boxed{V_c = \frac{1}{C}\int i dt}$$

# コンデンサ1

セラミック

タンタル

やや大容量

スチロール

高速

# コンデンサ2（大容量）

電気二重層
大容量、高速、低圧

ケミコン
大容量、中高圧

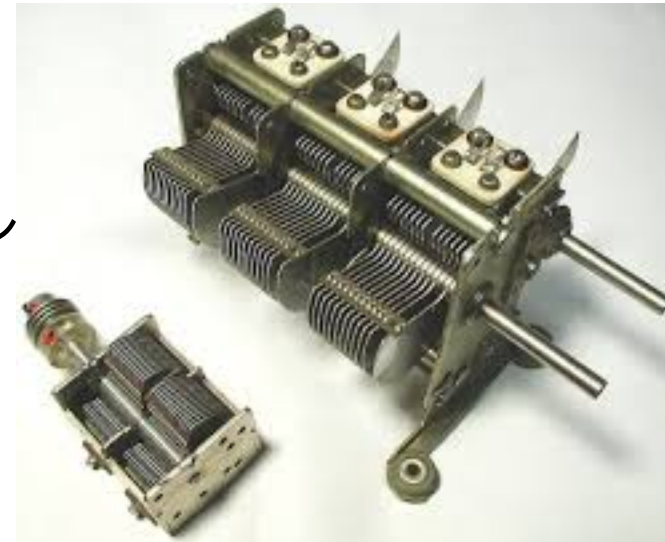
オイルコンデンサ
高耐圧


固体電解質

# コンデンサ3：可変

トリマー

エアバリコン



ポリバリコン

# 電位の定義

電位$\varphi$は電界が作る位置エネルギーのようなもの。位置エネルギー$U$の定義は、力**F**に距離**s**を掛けたものである。これは一様な力の場なら正しいが、力の場が場所によって変化する場合は、距離の掛け算ではなく、距離積分になる。式で書くと

$$U = \int \mathbf{F} d\mathbf{s}$$

と言うことになる。だとすると、電位の定義は、力の場**E**の距離積分と言うことになる。

$$\boxed{\phi = \int \mathbf{E} d\mathbf{s}}$$

これが電位をの正しい定義式である。この積分は3次元のベクトル**s**の微少量についての積分なので、$(dx,dy,dz)$の3成分を含んでいる。よって、以下の様に積分される。

$$\phi = \iiint \left(E_x, E_y, E_z\right) \bullet \left(dx, dy, dz\right) \quad \Delta\phi = E_x \Delta x + E_y \Delta y + E_z \Delta z$$

有限な微少量$\Delta\varphi$を積み上げると積分になる。逆にこの式を微分するには、3次元$(dx,dy,dz)$で微分する必要がある。

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \bullet \left(\Delta x, \Delta y, \Delta z\right)$$

微小ベクトル$\Delta$**s**による、電位の微小変化$\Delta\varphi$は上記のようになる。この微分は電界ベクトル**E**を表すはずである。

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z = E_x \Delta x + E_y \Delta y + E_z \Delta z$$

つまり、電位$\varphi$から電界**E**を求めるには、3次元の微分をする必要がある。

# 演算子

ここでかっこ悪い式が出てきた。

$$\left(\frac{d}{dx}\phi,\frac{d}{dy}\phi,\frac{d}{dz}\phi\right)=\left(E_x,E_y,E_z\right)$$

である。数学ではこんな面倒な書き方はしない。電界の3つのベクトル成分はまとめて$\mathbf{E}$と書く。だとしたら、微分もまとめて書く方法はないのか？それが▽である。

$$\nabla=\left(\frac{d}{dx},\frac{d}{dy},\frac{d}{dz}\right)$$

▽はナブラと読み、3次元の微分を表す記号である。微分は数学的な操作=演算なので、このような性質の記号を演算子（Operator)と呼ぶ。

ナブラを使うと、電位$\varphi$と電界$\mathbf{E}$の関係式は

$$\nabla\phi=\mathbf{E}$$

のようにきれいにまとめられる。

演算子の本当の意義は、演算を変数と同じように集合の要素として扱う点にある。演算と、演算される側の変数が同じなんて、奇妙な気がするが、計算上は非常に便利なので、のちのち物理の勉強をする人は覚えておくと良い。

# ガウスの法則　ふたたび

　さてさて、電位$\varphi$というスカラー量を微分すると、電界**E**というベクトル量になった。これは、地形のような、高さというスカラー量がある場の傾きを計算すると、傾きは方向毎に求められるのでベクトル量になる、と考えればよい。

　では、ベクトル量を微分すると何になるのだろう？実は、その答えは微分の仕方によって3つある。しかし、ここでは一つだけを紹介しよう。

　ベクトル微分∇とベクトル**E**の内積をとってみよう。

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

発散：Divergence

これは、各成分毎に微分している。ベクトルの一成分(たとえば$E_x$)は方向を持った流れのようなものである。それが微小距離$dx$進んだとき、どれだけ変化するか？ということは、流れが増えたか減ったかを示す量である。つまり、流れを生み出すものがあれば、それがこの微分量を増やすことになる。この流れを生み出す量のことを発散と呼ぶ。

　力線ε**E**の流れを生み出すものは電荷である。発散は電荷量を表すはずだ。電荷の密度をρとすれば、

$$\nabla \bullet \varepsilon \mathbf{E} = \rho$$

であろう。

# ダイバージェンス

前項の議論に従って、電界ベクトル**E**のダイバージェンスdiv**E**を次のように定義する。

$$div\mathbf{E} \equiv \nabla \bullet \mathbf{E} = \left( \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} \right)$$

ダイバージェンスは流れのベクトル**E**の変化分（増加）を、x,y,zの3方向について計算して足し合わせた量だ。

これに微小体積dxdydzを掛けると、その体積からわき出す流れの量が得られる。

　ガウスの法則によると、電束**D**=ε**E**の全表面積分（＝内部から出てくる量）は内部の電荷量に比例する。

　だとすると、微小体積から流れ出すわき出し量は内部の電荷密度を$\rho$として、$\rho dxdydz$と言うことになる。

$$\varepsilon\, div\boldsymbol{E}\; dxdydz = \rho\; dxdydz$$

よって、電界の発散（ダイバージェンス）は、ρ/εに等しいことになる。

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad div\mathbf{D} = \rho$$

これはガウスの法則の別表現（微分表記）である。

　ガウスの定理を用いると、以下の様に積分表記に変換できる。

$$\int_S \mathbf{D} \bullet \mathbf{n}\, da = \int_V \nabla \bullet \mathbf{D}\, dv \quad \int_S \mathbf{D} \bullet \mathbf{n}\, da = \int_V \rho\, dv$$

# ガウスの法則のまとめ

- ガウスの法則とは、「電荷からわき出す電束の総量は電荷量に等しい。」である。
- 積分型 $\int_S \mathbf{D} \bullet \mathbf{n}\, da = \int_V \rho\, dv$　　微分型 $\nabla \bullet \mathbf{D} = \rho$
- ベクトル量**D**のダイバージェンスは以下の様に定義され湧きだしの大きさを表す。

$$div\mathbf{D} \equiv \nabla \bullet \mathbf{D}$$

- ガウスの定理

$$\int_S \mathbf{D} \bullet \mathbf{n}\, da = \int_V \nabla \bullet \mathbf{D}\, dv$$