直列共振回路と
線形二階微分方程式

Series Resonance Circuit and

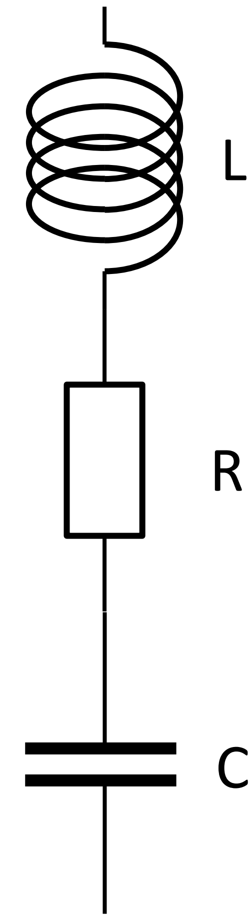
Second Order

Linear Differential Equation

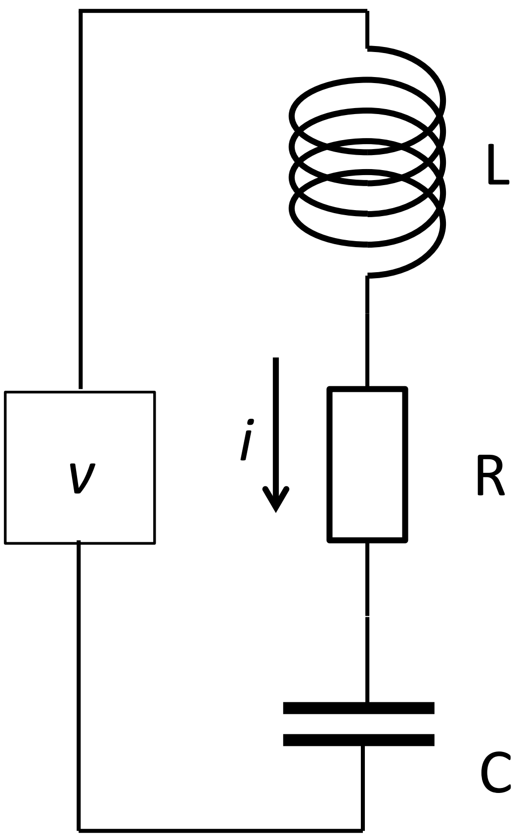
LとRとCの回路

受動回路（外部からのエネルギー供給を必要としない素子だけで動く）回路は、インダクタL、レジスタR,キャパシタCの3種類の素子で構成されている。

LRCからなる回路の動作を理解するため、3素子からなる最も簡単な回路の1つ、直列共振回路の動作を解析してみよう。



直列共振回路



L,R,Cの各素子にかかる電圧をvL, vR, vCとする。それぞれの電圧は、共通に流れる電流*i*と次の関係にある。

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$

$$v_R = Ri$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int idt$$

３素子は直列につながれているので、全体にかかる電圧vは各電圧の和になる。

$$v = v_L + v_R + v_C$$

$$= L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt$$

微分方程式を解く

はじめに、何が変数で何が定数かを区別する。

　下の例では、fとtが変数、ωが定数。そして

微分方程式は、n個の変数、m階までの微分演算（子）を含む方程式。

　○解となる関数にはm×n個の自由度がある。

　○解を決定するには自由度の数の境界条件が必要である。

例　$$\frac{d^2}{dt^2}f\left(t\right)+\omega^2 f\left(t\right)=0$$　1変数、2階＝2個の境界条件。

$f(0) = 1, f'(0) = 0$ など。

線形斉次二階微分方程式

電源電圧vが任意の時間関数$v(t)$の場合、微分方程式を解析的に解くことは困難だ。しかしvが定数の場合(電池やスイッチが切れている場合。)、両辺を微分すると右辺は0にできる。

この式はiについて一次(線形)で、斉次(右辺が0)な、二階の微分方程式である。

微分演算子(d/dt)を記号Xで表せば、方程式は(3)のように変形し、Xについて展開することができる。ここで、$j\omega_1$、$j\omega_2$は二次方程式の解で

$$j\omega_1 = \frac{-R+\sqrt{R^2-4(L/C)}}{2L}, j\omega_2 = \frac{-R-\sqrt{R^2-4(L/C)}}{2L}$$

である。

各々の方程式を解くと、2つの指数解が得られる。I_1, I_2は任意定数で、2自由度を与えることから、電流iの一般解は、これらの線形結合となることが分かる。

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt = v(t) \qquad (1)$$

$$\boxed{L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0} \qquad (2)$$

$$\left(X^2+\frac{R}{L}X+\frac{1}{LC}\right)i=0 \qquad (3)$$

$$(X-j\omega_1)(X-j\omega_2)i=0 \qquad (4)$$

$$\left(\frac{d}{dt}-j\omega_1\right)i=0, \left(\frac{d}{dt}-j\omega_2\right)i=0 \qquad (5)$$

$$i=I_1\exp(j\omega_1 t), i=I_2\exp(j\omega_1 t) \qquad (6)$$

$$i=I_1\exp(j\omega_1 t)+I_2\exp(j\omega_2 t) \qquad (7)$$

二階線形微分方程式の一般解

二階微分方程式の解は一般に2つ存在し、それらの線形結合が全ての解を表す。
なぜなら、微分方程式は変数の数（まあ当然）と微分の階数だけ（積分定数の分）、自由度があるからだ。

線形微分方程式の解は一般に複素数変数の指数関数の形を取る。実際にその解を代入すると式を満たすことができるから。

よって、一般解は以下の形になる。

$$f(t) = A_1 \exp(j\omega_1 t) + A_2 \exp(j\omega_2 t)$$

$A_1, A_2, \omega_1, \omega_2$は複素数の定数である。

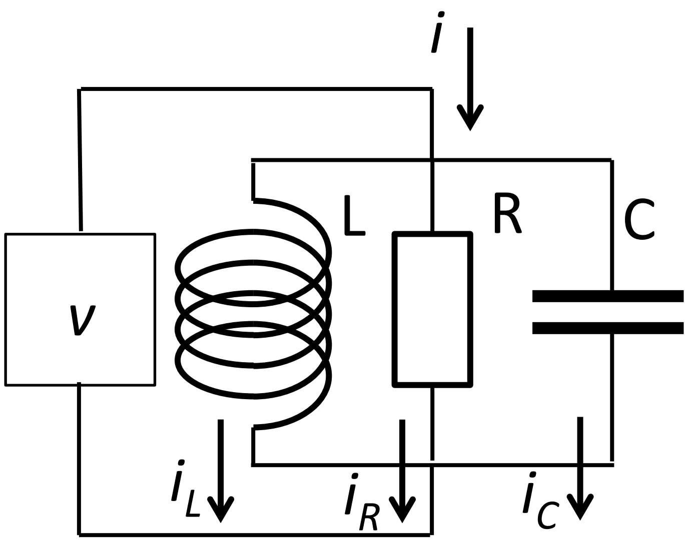
強制振動

微分方程式の解に現れる2つの周波数ω_1とω_2は固有値(Eigen value)と呼ばれる。固有値とは、直列共振回路がその周波数で振動しやすいことを意味している。（ω_1とω_2の振動成分は等しいので、周波数は1つ。）

ては電源vが固有値以外の周波数ωで振動していたらどうなるのだろうか。回路の電圧と電流は周波数ωで強制的に振動させられるが、回路を流れる電流は最大値より小さくなる。その結果、電源から回路に与えられるエネルギーも小さくなる。このように無理矢理エネルギーを送り込んで振動させることを、強制振動と呼ぶ。周波数が固有値に合わないと、装置を動かす場合には効率が悪くなってしまう場合もある。（スピーカー、アンテナなど。）

超音波振動子などは、目的に合わせて固有周波数を合わせて設計する。

並列共振回路



定電流源の電圧を*v*、電流を*i*、L,R,Cの各素子に流れる電流をi_L, i_R, i_Cとする。電流電圧の関係を逆にすると、それぞれの電流は、電源電圧*v*で次のように表せる。

$$i_L = \frac{1}{L}\int v dt$$

$$i_R = \frac{1}{R} v$$

$$i_C = C\frac{dv}{dt}$$

３素子に流れる電流の和は、全電流iになる。

$$\begin{aligned} i &= i_L + i_R + i_C \\ &= \frac{1}{L}\int v dt + \frac{1}{R} v + C\frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

数学的等価性

数式の上で同じ方程式に従う現象は同じ振る舞いをする。（同じ解を持つ。）右の変数変換により、並列共振回路の電圧は、直列共振回路の電流と同じ形の方程式に従うことが分かる。よって、解の形も同じになる。

$$v \to i$$
$$i \to v$$
$$L \to C$$
$$R \to 1/R$$
$$C \to L$$

$$j\omega_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4\left(CR^2/L\right)}}{2RC}, j\omega_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4\left(CR^2/L\right)}}{2RC}$$

$$v = V_1 \exp(j\omega_1 t), v = V_2 \exp(j\omega_1 t)$$

$$v = V_1 \exp(j\omega_1 t) + V_2 \exp(j\omega_1 t)$$

電源に定電圧源を用いるとコイルに大電流が流れて理論上は壊れてしまう。（実際にはコイルや電池の内部抵抗で電流が制限される。）電源スイッチを切ると上記の解が発生し、コイルとキャパシタの間で電流が振動し、抵抗の両端に電圧が発生する。