微分方程式の解

微分方程式の中でも、特に基本的な形の微分方程式がある。これらの解き方をおさらいしておこう。

１、多項式
一般に、xを変数としてxのn乗の和で表される式を多項式と呼ぶ。多項式の微分、積分は、0乗の部分を除けば、単に乗数の減少、増加になる。例えばfをxの関数f（x）, aを定数として、

$$\frac{df}{dx} = ax$$

の解は、

$$\int df = \int axdx \qquad f = \frac{1}{2}ax^2 + C$$

で求められる。
　xの次数が変わっても、同様に乗数の増減で計算が可能で、機械的に解を求めることができる。ただし、x^{-1}の積分だけは$\log_e(x)$になることは覚えておく必要がある。

斉次方程式の解

同様に基本的な微分方程式に斉次方程式がある。斉次とは、fの次数が全ての項でそろっていると言うことで、通常は一次の場合について考える。例えば

$$\frac{df}{dx} = af$$

は1階の斉次微分方程式だ。この解は変数分離法でも求められるが、実は解の形は必ず指数関数になるので、A,αを複素数として

$$f = A\exp(\alpha x)$$

と置き、方程式に代入してαを求めることができる。（Aは任意定数になるので、一般解では決定されない。境界条件が決まれば一意に決定される。）実際に代入すると、

$$\frac{df}{dx} = A\alpha\exp(\alpha x) = aA\exp(\alpha x)$$

より、α=aが求まり、一般解は

$$f(x) = A\exp(ax)$$

と求められる。

高階斉次方程式の解

実は、線形システムの微分方程式は基本的に斉次方程式で表されるので、その解はみな指数関数になる。なので、方程式を解くには、単に指数関数の解を代入すれば良い。

$$a\frac{d^2 f}{dx^2}+b\frac{df}{dx}+cf=0$$

に　$f=A\exp(\alpha x)$　を代入すると、

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

が導かれ、未知数αは二次方程式を解けば求められる。（二次なので2つ）

そして、一般解はそれらの解の和になる。

つまり微分方程式はn次方程式として容易に解を求めることができる。

これは線形システムの特徴なので、この解き方を知っておくと多くの線形現象に適用できる。