複素数の波動

波動と言えばサイン･コサイン
しかし、変数と値を複素数に拡張すれば、指数関数も波動になる。

指数関数expの
波動としての性質を学ぼう。

波とは何か

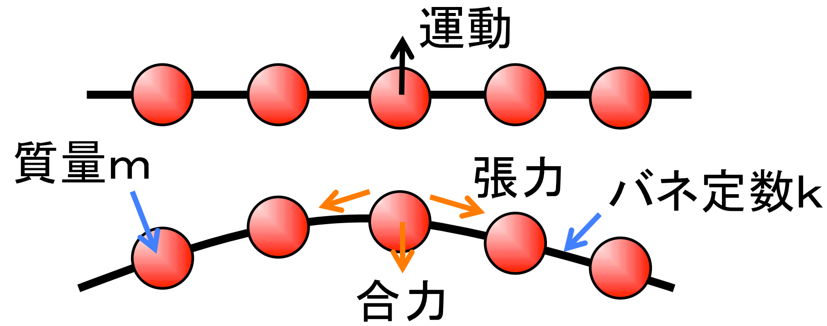
波とは･･･

　気体や、液体や、固体などの媒質が、安定点の両側に往復運動する現象。

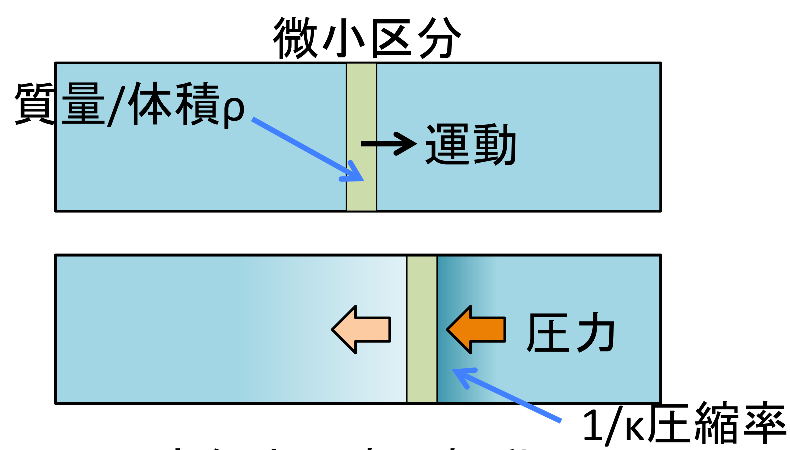
　時間と共に振動の安定点が平行移動する場合、進行波になる。振動数は媒質間の結合の堅さkと媒質の慣性mで決まる。

k：バネ定数=復元力/変位

m：質量=慣性力/加速度



弦の振動



空気中の音の振動

波の式

　数学的な取り扱いのため、波を式に表すとき、正弦波＝sin波を使うのが便利である。

　周波数fで振動する振幅Aの波の関数φは、

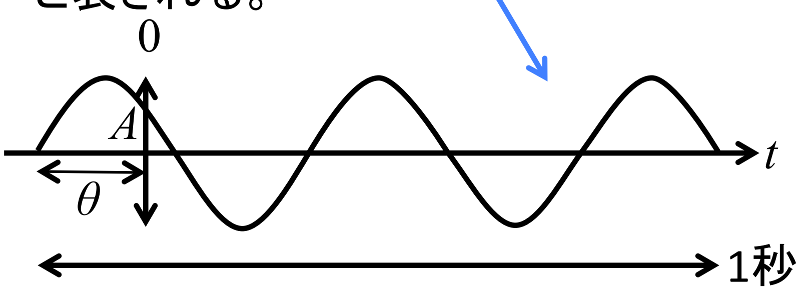
$$\varphi=A\sin(2\pi ft)$$

と表せる。

　cosはsinの位相に90度=$\pi/2$が足されたときの値を示すので、本質的には同じ形の波である。位相θの波は一般に

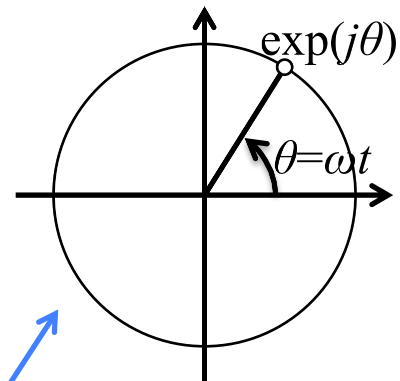
$$\varphi=A\sin(2\pi ft+\theta)$$

と表される。



f :波の数/単位時間

$\omega = 2\pi f$:角度変化/単位時間



　オイラーの公式を使うと、指数関数によって正弦波を表すことができる。

$$\exp(j2\pi ft)=\cos(2\pi ft)+j\sin(2\pi ft)$$

　虚数変数の指数関数はガウス平面内で半径1の円周上を回転するので、正弦波状の変化をするのである。

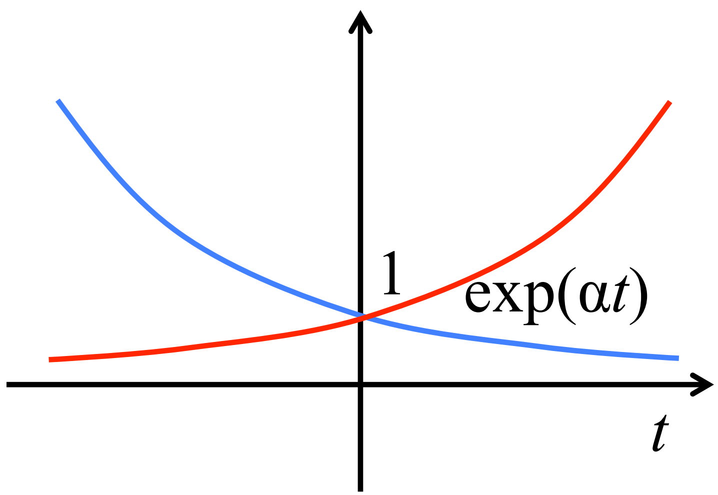
　この式から、逆に正弦波を求めることもできる。

$$\cos(2\pi ft)=\{\exp(j2\pi ft)+\exp(j2\pi ft)\}/2$$

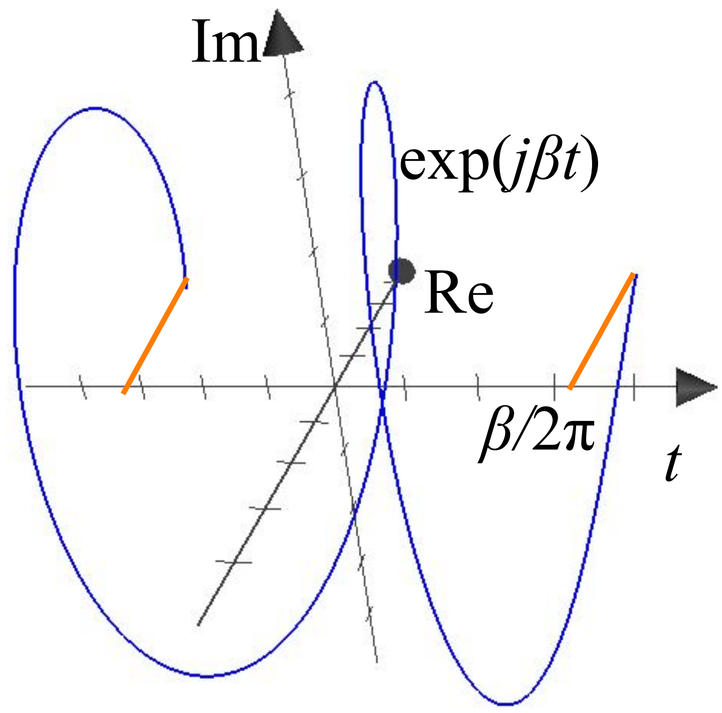
$$\sin(2\pi ft)=\{\exp(j2\pi ft)-\exp(j2\pi ft)\}/j2$$

解$\exp(j\omega t)$ のグラフの形1

実数係数の指数関数
変数(t)につれて減衰(係数が負)、または増加(係数が正)する。



虚数係数の指数関数
変数(t)につれて螺旋を描く。



解$\exp(j\omega t)$ のグラフの形2

複素数の角周波数ω を実数α と虚数 $j\beta$(α と β は実数)の和で表す。

$$\omega = \alpha + j\beta$$

この時関数 $\exp(j\omega t)$ は関数$\exp(-\beta t)$ と$\exp(j\alpha t)$の積となる。

それぞれの関数は、増加、または減少する指数関数と、ガウス平面を回転する螺旋なので、積は収束、または発散する螺旋になる。

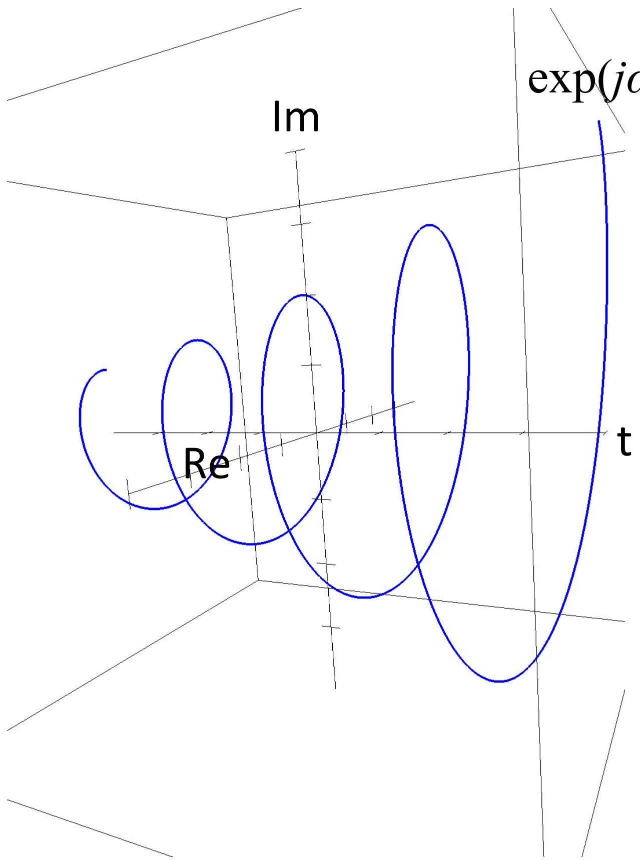


Fig. 0-X 3D graph of $\exp(j\omega t)$.

共振回路の動作

解の形から、共振回路に流れる電流iは、振動しながら減衰することが予想される。（エネルギーが勝手に増加することはないので。）

振動現象は、もっぱらLとCの間のエネルギー交換によって発生する。

抵抗がなければ周波数は $1/\sqrt{LC}$ になる。

抵抗Rがあると周波数は低周波側にシフトする。

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}}$$

付録:複素数

- 虚数は四則演算による数集合の拡張。2乗の逆写像について閉じた集合を構成するためには、2乗して-1になる数が必要。これを虚数と呼ぶ。
- 実数と虚数の線形結合を複素数と呼ぶ。
- 複素数の和・差はベクトルと同様。
- 複素数の積は成分ごとの演算の和で、商はその逆演算をしなければならない。