今日の問題2018（15分）

(1) 関数$\varphi(t)=\exp(j\omega t)$は複素数値をもつ、時間$t$の関数である。その虚数部分を、$\varphi(t)$と$\varphi(-t)$を用いて表せ。

(2) 関数$\varphi(t)=\exp(j\omega t)$を、微分、及び積分せよ。ただし、積分定数は0としてよい。

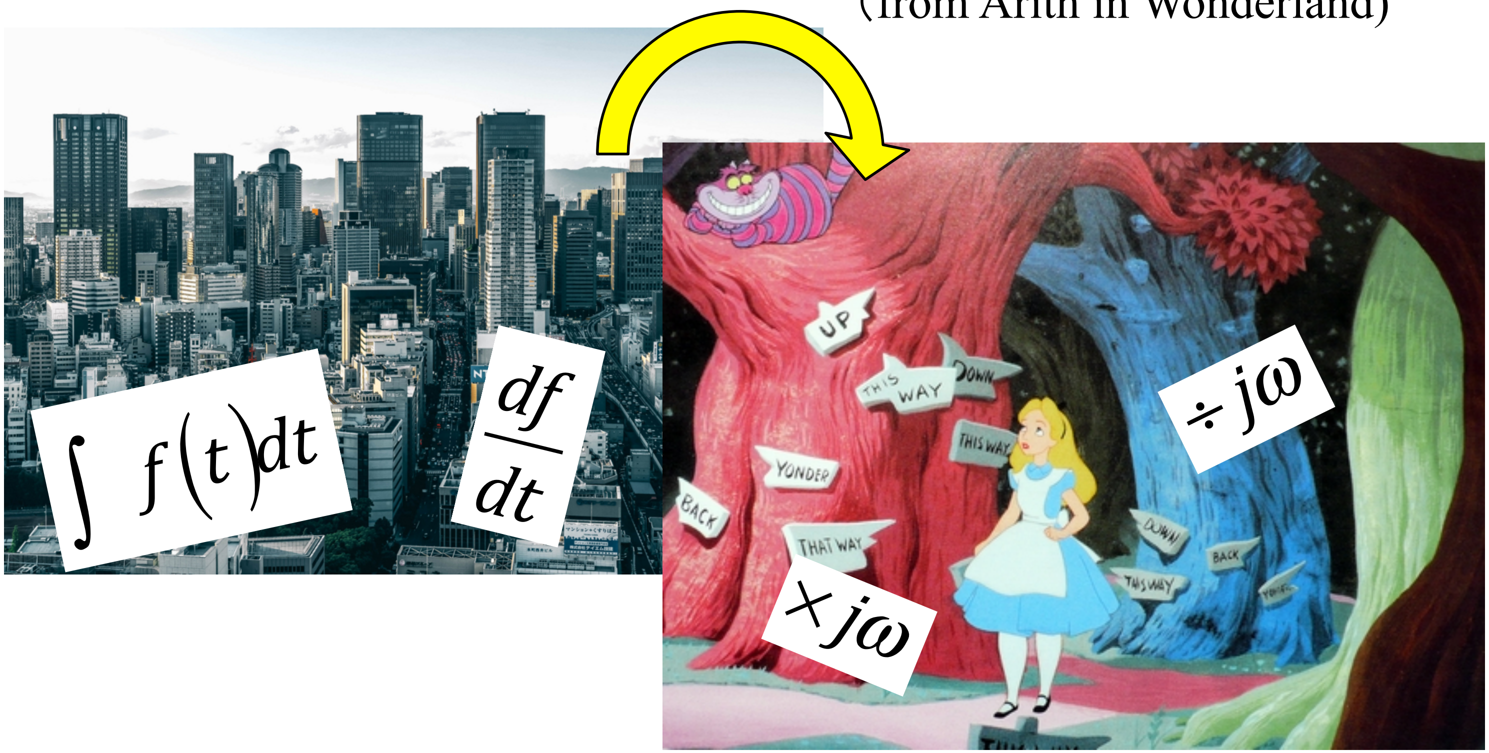
不思議の国へ行こう！

そこでは、微分は掛け算に、積分は割り算に変わってしまう。
もう、微積分で悩む必要はははないのです。

（不思議の国のアリスより）

Integral is metamorphosed to multiple and differentiate to divide.
There, thou shall never be annoyed with analysis.

（from Arith in Wonderland)



振動解の微積分

　一般に線形微分方程式の振動解はexpで表される。そしてexpの微分、および積分に関する特性を使うと、微分方程式は、単なる二次方程式に変換できる。

　この振動解の特性を利用してインピーダンスという考えを導入すると、回路の動作をより簡単に解析することができる。

　ここでは便利な道具、インピーダンスについて学ぼう。

expの微分積分の置き換え

$\exp(x)$はその微分が$\exp(x)$になるという、特殊な関数だ。微分によって関数形が変わらないと言うことは、積分によっても関数形は変わらない。

$$\frac{d}{dx}\exp(x)=\exp(x)$$

$$\int \exp(x)dx=\exp(x)$$

（積分範囲を適当にとれば積分定数は0になる。）

角周波数ωの正弦波$f(t)$は時間tの関数として、

$\mathrm{f}(t)=\exp(j\omega t)$

と表せる。そのt微分は

$\mathrm{df}/\mathrm{d}t=j\omega\cdot\mathrm{f}(t)$

$$\frac{d}{dt}\exp(j\omega t)=j\omega\frac{d}{d(j\omega t)}\exp(j\omega t)=j\omega\exp(j\omega t)$$

と置き換えられる。また、t積分は

$\int\mathrm{f}(t)\mathrm{d}t=\mathrm{f}(t)/j\omega$

$$\int \exp(j\omega t)dt=\frac{1}{j\omega}\int \exp(j\omega t)d(j\omega t)=\frac{1}{j\omega}\exp(j\omega t)$$

と置き換えられる。

大事な要点

つまり、振動解$\exp(j\omega t)$の世界では、

微分 $\dfrac{d}{dt}$ は、$j\omega$ を掛ける

積分 $\int dt$ は、$j\omega$ で割る

ことと同じになってしまう。

複素周波数

指数関数expは、変数が虚数なら振動、実数なら単調減衰（増加）を表す。両方の指数関数の積をとると、変数は和になるので、複素数の変数(＝複素周波数)を持つ。その形は減衰振動（または増加振動）で、２階線形微分方程式の一般解となる。時間tに対する複素係数γ=a+jbで振動と減衰を表す場合、

$$\exp(j\gamma t)=\exp(jat)\cdot\exp(-bt)$$

と分解すると、aが角周波数、bが減衰定数であることが分かる。

γを周波数ωの複素数への拡張と考えるなら、jbは虚数周波数である。

$$\gamma=\omega_r+\omega_i=a+jb$$

逆にγ/jを減衰定数βの複素数への拡張と考えるなら、-jaは虚数減衰定数である。

$$\gamma/j=\beta_r+\beta_i=b-ja$$

インダクタとキャパシタの係数

インダクタLとキャパシタCにおける、電圧vと電流iの関係を、微積分の置き換えで表してみよう

$$v_L = L\frac{di}{dt} \qquad v_L = j\omega Li$$

$$v_R = Ri \qquad v_R = Ri$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int idt \qquad v_C = \frac{1}{j\omega C}i$$

これと抵抗Rの関係を比較すると、jωLと1/jωCが抵抗Rと同じ役割をしていることが分かる。つまり、周波数ωの正弦波に対して、jωLおよび1/jωCは虚数の抵抗なのである。Rを含めれば、交流電流iに対して複素数の抵抗がかかり、電圧vが発生することになる。このような複素数抵抗をインピーダンスと呼ぶ。

インピーダンス

インピーダンスをZと書くと、抵抗、インダクタ、キャパシタのインピーダンスZ_R,Z_L,Z_Cはそれぞれ

$$Z_R = R, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_C = 1/j\omega C$$

と表せる。インピーダンスは周波数によって変わることがわかる。
　直列共振回路のインピーダンスZは

$$Z = R + j\omega L + 1/j\omega C = R + j\left(\omega L - 1/\omega C\right)$$

である。
　特にインピーダンスの実数部分はレジスタンスR、虚数部分の大きさはリアクタンスXと呼ぶ。

$$Z = R + jX \quad X = \omega L - 1/\omega C$$

一休み


NATIONAL GEOGRAPHIC
Photograph by Jim Richardson
© COPYRIGHT NATIONAL GEOGRAPHIC SOCIETY. ALL RIGHTS RESERVED.

インピーダンスの幸福

インピーダンス“Z”を使うと、

・抵抗とコイルとキャパシタを統一的に扱える。

$Z_R = R, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_C = 1/j\omega C$

・微分と積分が、かけ算と割り算になる。

アドミッタンス

　抵抗Rの逆数は伝導度（コンダクタンス）Sと呼ばれ、電流の流れやすさを示す定数である。同じようにインピーダンスZの逆数はアドミッタンスYと呼ばれ、電圧vと電流iとは

$$i = Yv$$

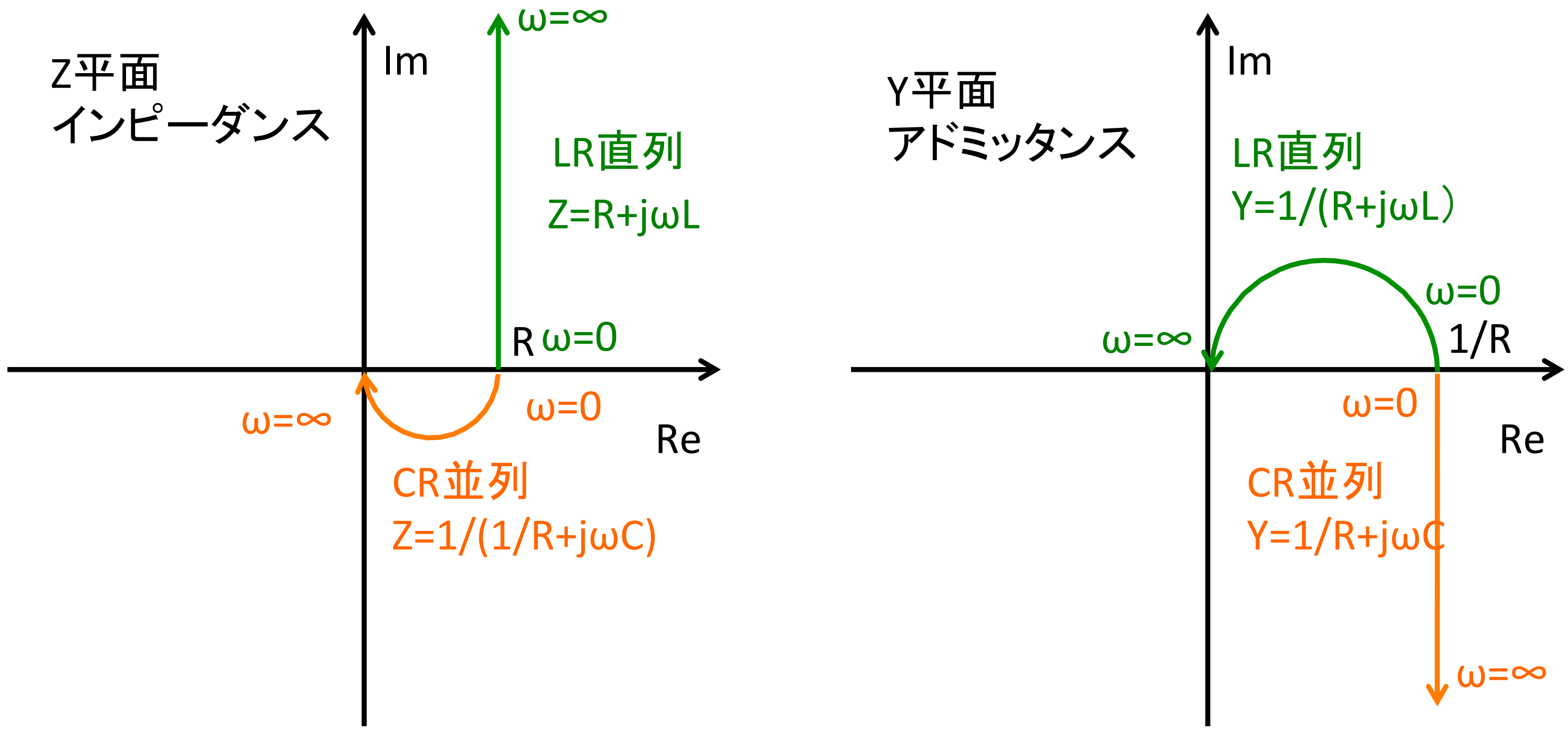
の関係になる。
　並列回路ではアドミッタンスの合成がただの足し算になるので、回路によってZと使い分けると計算がし易くなる。

$$Y_R = 1/R, \quad Y_L = 1/j\omega L, \quad Y_C = j\omega C$$

Z,Yは共に周波数ωの関数で、ガウス平面上である特定の軌跡を描く。

ガウス平面上のインピーダンス

インピーダンスZ(とアドミッタンスY)は複素数なので、周波数ω
が変化すると、ガウス平面上を動く。直線の逆数は円を描く。



この特性を使うと回路の動作を推定できる。

電力

- 電圧vは力の大きさ、電流iはそれによって流れる電荷の量。その積は単位時間に消費されるエネルギー（仕事率）＝電力W（ワット=J/sec）になる。

W=vi

物体の運動：力×速度＝仕事率　W=f・v

流体の運動：（圧力×流速）×面積＝仕事率　W=（p・v）S

と同様の関係。

- 抵抗では仕事は熱に変わり、散逸するが、キャパシタ・インダクタでは電荷の形で素子に保存され、エネルギーとして返ってくる。

有効電力と無効電力

　損失分の電力は他のエネルギーに変わるので、外部に効力を有する有効電力と呼ぶ。それは熱となったり、モーターの駆動力になったりする。

　一方、純粋なキャパシタ・インダクタの電力は回路に戻ってくるので外部に効力を持たず、無効電力と呼ばれる。印加する交流電圧vを基準としたとき、回路に流れる電流iは同位相成分i_1と90度位相のずれた直交成分ji_2に分かれる。

$$i=i_1+ji_2$$

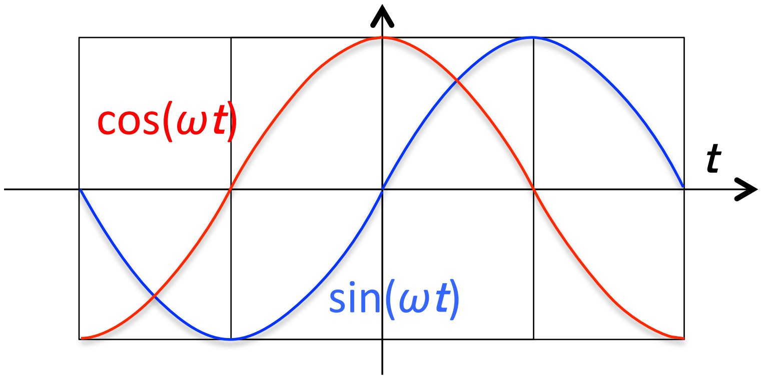
アドミッタンスを$Y=a+jb=Y_0\exp(-j\theta)=1/Z_0\ \exp(j\theta)$とすると、

$$i=Y\cdot v=a\cdot v+jb\cdot v=Y_0\cdot v\ \{\cos(\theta)+j\sin(\theta)\}$$

と、電流の位相角はアドミッタンスで決まり、その実部と虚部の割合で、電力は有効電力と無効電力に分かれる。

ここでY_0はアドミッタンスの絶対値、Z_0はインピーダンスの絶対値、θは電流の位相角。

付録:正弦波の位相



正弦波cos(ωt+θ)は、位相がθだけ遅れたcos波で、cosとsinの線形結合(適当な比率の和)で表すことができる。

電圧波形との積は電力を表す。同じ位相の橙は有効電力、90度位相のずれた水色は無効電力を示す。

有効電力は平均して1/2になるが、無効電力は平均すると0になる。

位相差0

$i=\cos(\omega t)$

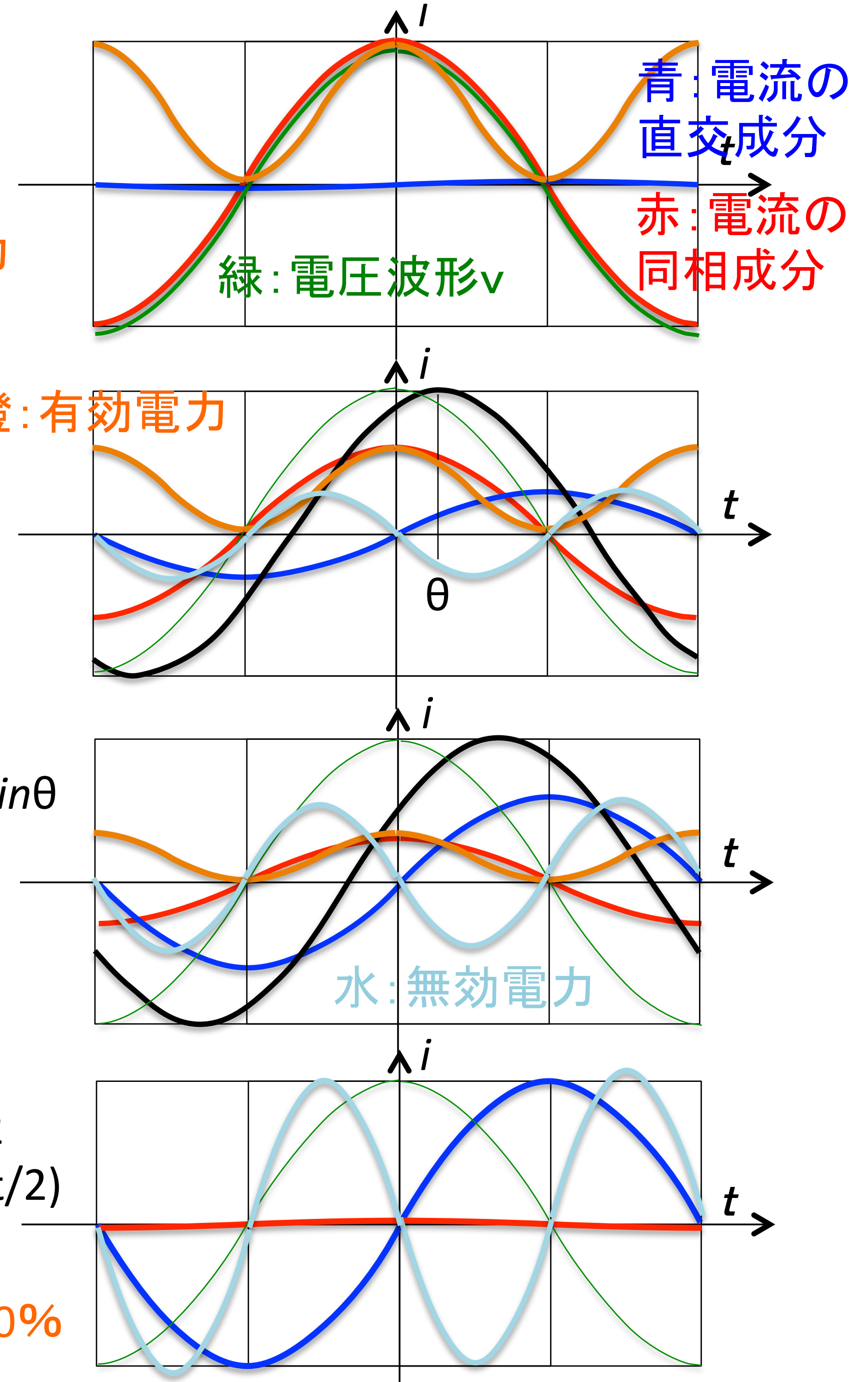
有効電力100%

$i=\cos(\omega t+\theta)$
$=A\cos(\omega t)$
$+B\sin(\omega t)$
$A=\cos\theta, B=\sin\theta$

位相差π/2

$i=\cos(\omega t+\pi/2)$
$=\sin(\omega t)$

有効電力0%



インピーダンスとアドミッタンス

イミッタンス（Immittance)一覧

	複素数値	実部	虚部	単位
抵抗成分	$Z = R + jX$ $Z = 1/Y$	$R = G/(G^2+B^2)$	$X = -B/(G^2+B^2)$	[Ω]
	インピーダンス Impedance	レジスタンス Resistance	リアクタンス Reactance	オーム
導電成分	$Y = G + jB$ $Y = 1/Z$	$G = R/(R^2+X^2)$	$B = -X/(R^2+X^2)$	[S]
	アドミッタンス Admittance	コンダクタンス Conductance	サセプタンス Susceptance	ジーメンス

今日の問題（15分）

(1) 関数$\varphi(t)=\exp(j\omega t)$を微分、及び積分せよ。

(2) 角周波数ωで振動する正弦波交流電流 $i=i_0\exp(j\omega t)$が流れたとき、インダクタLおよび キャパシタCにかかる電圧v_L及びv_Cを求めよ。

(3) $j\omega L+(1/j\omega C)=0$ を満たすωを求めよ。