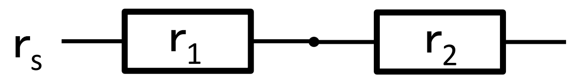
キルヒホッフの法則

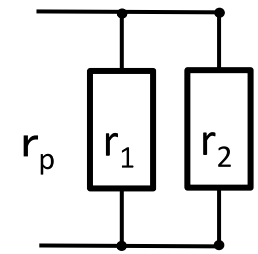
　素子が2-3個の簡単な回路なら、インピーダンスを使って、回路の動作を簡単に知ることができた。しかし、実際の回路ではもっと複雑なネットワークになった回路も存在する。そんな回路の動作を知るためにはどうすれば良いのだろう？

　そんな複雑な回路網の特性を解析するうまい方法を紹介しよう。

直列と並列

二つの抵抗r_1とr_2を直列と並列につないだときの合成抵抗、r_sとr_pのはそれぞれ以下の式で計算できる。





$r_s=r_1+r_2$

$r_p=1/((1/r_1) + (1/r_2))$（$= r_1//r_2$ とも書く）

電流の流れる向きが分かれば、順次この計算を繰り返すことで、複雑な枝分かれの回路でも、全体の抵抗を求め、その結果から流れる電流を求めることもできる。

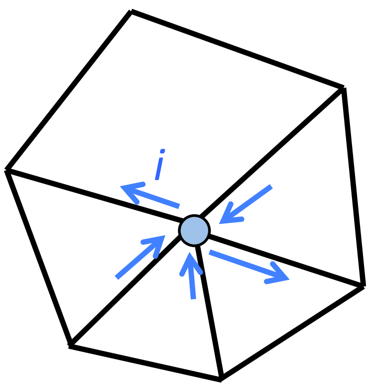
しかし、電流の向きさえ分からない回路網では、各部を流れる電流や、素子にかかる電圧を求めることは難しい。　そこで・・・＞

キルヒホッフの法則

複雑な回路網の特性を求めるとき、キルヒホッフの法則が使われる。キルヒホッフの法則は2つある。

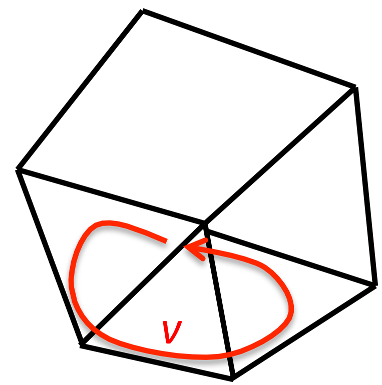
電流則：1つの節点に流れ込む電流の総和は0（第一法則）

電圧則：1つの閉回路に沿った電圧の総和は0（第二法則）



どの点でも流れ込む電流の総量は0になる。

どんな経路に沿って電圧を足し合わせても、一周すると0になる。

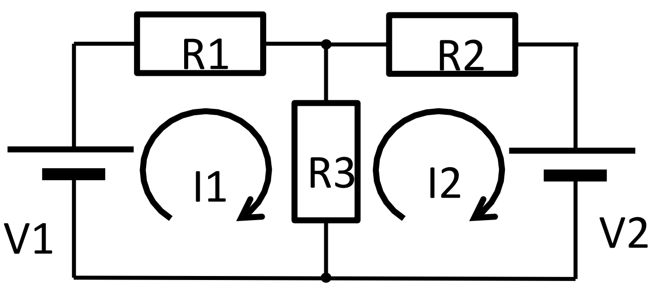


電流則は電荷の保存を意味している。1つの節点内の電荷量は不変なので、入ってくる電荷量と出て行く電荷量の和は0になるのである。

電圧則は電位が保存場であることを意味している。保存場とは、電位がそれぞれの位置の関数で、途中経路に依らないということである。

線形性と重ね合わせ

インピーダンスZで構成される電気回路では**線形性**が成り立つため、電気回路を部分に分けて働きを調べ、それを重ね合わせて全体の動作を知ることができる。



電圧則

V1-R1(I1)-R3(I1-I2)=0

-V2-R3(I2-I1)-R2(I2)=0

電圧源と抵抗の値が与えられれば、未知数は2つで、式も2つなので、電流値を計算することができる。

左の回路を、個々のループに分けて、それぞれに流れる電流(I1,I2)を考える。ループ電流では電荷量が保存されるので、キルヒホッフの電流則が自動的に成立する。ループの重なり部分では電流も和になる。抵抗に発生する電圧は、電流と逆向き(止める方向)に発生するので、抵抗にマイナスを掛けて計算する。

計算してみよう

前のスライドの、２つのループから成る回路に流れる電流を計算してみよう。

V1-R1(I1)-R3(I1-I2)=0
-V2-R3(I2-I1)-R2(I2)=0
電流毎の項にまとめる
V1=(R1+R3)(I1)-R3(I2)
V2=R3(I1)-(R2+R3)(I2)
電流I1の計数を揃える
R3V1=R3(R1+R3)(I1)-R3R3(I2)
(R1+R3)V2=R3(R1+R3) (I1)
-(R2+R3) (R1+R3)(I2)
上の式から下の式を引く
R3(V1-V2)-R1V2=(R3(R1+R2)+R1R2)I2
I2=(R3(V1-V2)-R1V2)/(R3(R1+R2)+R1R2)
=(R3V1-(R1+R3)V2)/(R1R2+R2R3+R3R1)

V2の式に代入してI1を求める。
R3I1=V2+(R2+R3)(I2)
=V2+(R2+R3) (R3V1-(R1+R3)V2)/
(R1R2+R2R3+R3R1)
=(((R1R2+R2R3+R3R1)-(R2+R3)(R1+R3))V2
+(R2+R3) R3V1)/(R1R2+R2R3+R3R1)
=(-R3R3V2+R3(R2+R3)V1)/
(R1R2+R2R3+R3R1)
I1=(R2+R3)V1-R3V2)/(R1R2+R2R3+R3R1)

付録：線形性

線形性とは例えば、電圧Vが電流Iの関数fであるとき[V=f(I)]、電流が定数k倍、または電流の和I1+I2になると、結果の電圧も同じk倍、または電圧の和V1+V2になること。

$f(kI)=kV \qquad f(I1+I2)=f(I1)+f(I2)=V1+V2$

電圧と電流は比例関係なので、線形性が成り立つことは分かりやすい。しかし、それだけでなく微分や積分の操作でも線形性が成り立つ。そのため微分方程式においても、解の線形性を利用した操作が可能になる。

キルヒホッフの法則の応用

多数のループから成る回路でも、同じように最小のループを流れる電流に分けて考えれば、自動的に連立方程式がたてられる。

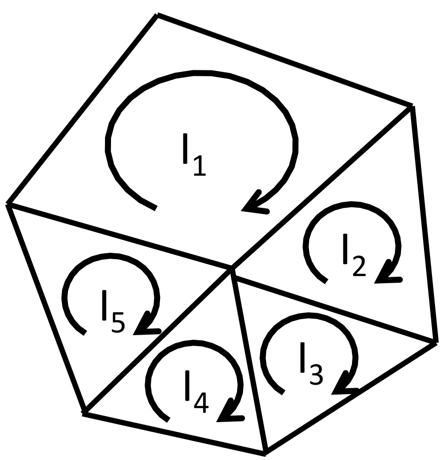
下の式で、V1はループ1の中の全起電力（電池の電圧）の和、電流I1が通るループ内の抵抗、I2の抵抗はループ2との重なり部分の抵抗。以下、同様に、隣のループと重なる部分は隣の電流分、電圧RnnInが加算される。

最終的に、ループ数＝電流数の未知数を持った連立方程式が立てられるので、電流が計算できる。

V1=R11I1+R12I2+・・・R1nIn

V2=R12I1+R22I2+・・・R2nIn

Vn=Rn1I1+Rn2I2+・・・RnnIn



実際の計算では、4変数以上の連立方程式を解くのは大変なので、電圧ベクトル**V**,電流ベクトル**I**に対して抵抗行列**M**を定義し、逆行列を計算する。

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & \cdots & I_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ & \vdots & & \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = M\mathbf{I}$$

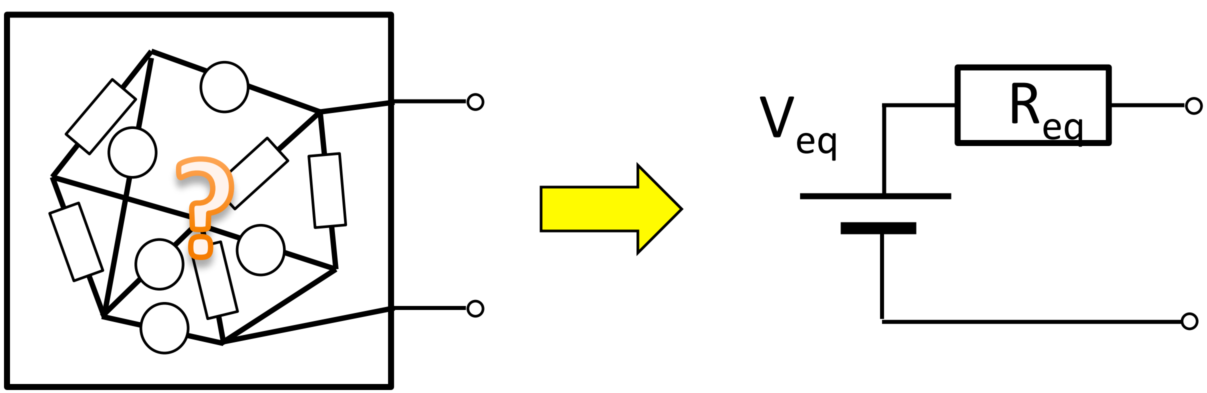
$$\mathbf{I} = M^{-1}\mathbf{V}$$

鳳テブナンの定理

電源を含む回路網の動作を計算する際に用いられる重要な方法論に、鳳−テブナンの定理がある。（もともとはヘルムホルツが発見、テブナンが再発見、鳳が交流に拡張。）

「＊任意の（交流・直流）電圧源とインピーダンスから成る回路網の二端子間の動作は、単一の電圧源と内部抵抗からなる等価回路で置き換えることができる。」

電圧源の電圧は、入力インピーダンス無限大の電圧計で測定し、内部抵抗は、全ての電圧源を短絡、電流源を解放して抵抗計で測定すれば、決定できる。

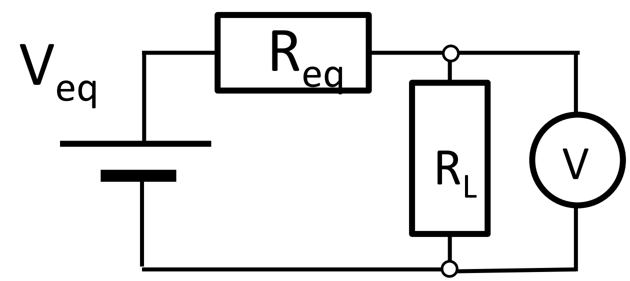


または可変抵抗を負荷として接続し、抵抗にかかる出力電圧を測定することで内部抵抗と電源電圧を計算することができる。

等価回路の定数測定

- 等価回路の電圧と内部インピーダンスは可変抵抗を負荷に接続し、印加される電圧と流れる電流の関係からも知ることができる。

等価回路の電圧をV_{eq},内部抵抗をR_{eq}とする。負荷抵抗R_Lにかかる電圧Vは、



$$V = \frac{R_L}{R_{eq} + R_L} V_{eq}$$

となる。
不可抵抗R_Lの値をR1,R2に変え
て測定した出力電圧をV1,V2とすると、

$$\left(R_{eq} + R_1\right)V_1 = R_1 V_{eq}$$
$$\left(R_{eq} + R_2\right)V_2 = R_2 V_{eq}$$

より、

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 \left(V_2 - V_1\right)}{V_1 R_2 - V_2 R_1}$$
$$V_{eq} = \frac{V_1 V_2 \left(R_2 - R_1\right)}{V_1 R_2 - V_2 R_1}$$

が得られる。